

# **Algebra pentru toți**

## **Clasa a XII-a**

<b>Capitolul 1 GRUPURI.....</b>	<b>3</b>
1.1. Lege de compoziție internă. Parte stabilă.....	3
1.2. Asociativitate. Comutativitate.....	9
1.3. Element neutru. Element simetrizabil.....	14
1.4. Monoizi. Semigrup.....	20
1.5. Clase de resturi modulo $n$ .....	24
1.6. Grupuri.....	29
1.7. Grupuri de matrice. Grupuri de permutări. Grupul $U_n$ .....	34
1.8. Reguli de calcul într-un grup.....	41
1.9. Subgrupuri.....	45
1.10. Grupuri finite.....	49
1.11. Morfisme și izomorfisme de grupuri.....	53
1.12. Probleme de sinteză. Probleme pentru concursuri.....	57
1.13. TESTE DE EVALUARE.....	61
<b>Capitolul 2 INELE ȘI CORPURI.....</b>	<b>64</b>
2.1. Inele. Exemple.....	64
2.2. Reguli de calcul într-un inel.....	70
2.3. Corpuri.....	75
2.4. Morfisme și izomorfisme de inele și corpuri.....	80
2.5. Ecuații și sisteme de ecuații în $\mathbb{Z}_n$ .....	85
2.6. TESTE DE EVALUARE.....	91
<b>Capitolul 3 INELE DE POLINOAME.....</b>	<b>93</b>
3.1. Forma algebrică a unui polinom. Gradul unui polinom. Funcția polinomială..	93
3.2. Teorema împărțirii cu rest. Schema lui Horner.....	98
3.3. Divizibilitatea polinoamelor. Descompunerea polinoamelor în factori irreductibili.....	102
3.4. Rădăcinile polinoamelor. Ecuații reciproce. Ecuații binome.....	110
3.5. Derivata formală a unui polinom. Rădăcini multiple.....	116
3.6. Relațiile lui Viète.....	119
3.7. Polinoame cu coeficienți reali.....	127
3.8. Polinoame cu coeficienți în $\mathbb{Q}$ . Polinoame cu coeficienți în $\mathbb{Z}$ .....	132
3.9. Probleme de sinteză. Probleme pentru concursuri.....	138
3.10. TESTE DE EVALUARE.....	142
<b>SOLUȚII.....</b>	<b>144</b>
Capitolul 1. GRUPURI.....	144
1.1. Lege de compoziție internă. Parte stabilă.....	144
1.2. Asociativitate. Comutativitate.....	146

1.3. Element neutru. Element simetrizabil.....	147
1.4. Monoizi.....	147
1.5. Clase de resturi modulo $n$ .....	148
1.6. Grupuri.....	149
1.7. Grupuri de matrice. Grupuri de permutări. Grupul $U_n$ .....	150
1.8. Reguli de calcul într-un grup.....	151
1.9. Subgrupuri.....	153
1.10. Grupuri finite.....	155
1.11. Morfisme și izomorfisme de grupuri.....	157
1.12. Probleme de sinteză. Probleme pentru concursuri.....	160
Capitolul 2. INELE ȘI CORPURI.....	166
2.1. Inele. Exemple.....	166
2.2. Reguli de calcul într-un inel.....	168
2.3. Corpuri.....	171
2.4. Morfisme și izomorfisme de inele și corpuri.....	173
2.5. Ecuații și sisteme de ecuații în $\mathbb{Z}_n$ .....	176
Capitolul 3. INELE DE POLINOAME.....	179
3.1. Forma algebrică a unui polinom. Gradul unui polinom. Funcția polinomială.....	179
3.2. Teorema împărțirii cu rest. Schema lui Horner.....	180
3.3. Divizibilitatea polinoamelor. Descompunerea polinoamelor în factori ireductibili.....	182
3.4. Rădăcinile polinoamelor. Ecuații reciproce. Ecuații binome.....	186
3.5. Derivata formală a unui polinom. Rădăcini multiple.....	190
3.6. Relațiile lui Viète.....	191
3.7. Polinoame cu coeficienți reali.....	195
3.8. Polinoame cu coeficienți în $\mathbb{Q}$ . Polinoame cu coeficienți în $\mathbb{Z}$ .....	200
3.9. Probleme de sinteză. Probleme pentru concursuri.....	204

### 1.1. Lege de compoziție internă. Parte stabilă

**Definiția 1.** Fie o mulțime nevidă  $M$ . Se numește *lege de compoziție (internă) pe  $M$*  (sau operație algebrică pe  $M$  sau operație binară pe  $M$ ) o aplicație  $f: M \times M \rightarrow M$ .

Elementul corespunzător cuplului (perechii)  $(x, y)$  prin funcția (aplicația)  $f$  se numește *compusul* lui  $x$  cu  $y$  (în această ordine!) și se notează cu  $f((x, y))$  sau, mai simplu  $f(x, y)$ .

**Observație:** Pentru legea de compoziție se folosesc diverse notații: aditivă  $(x + y)$ ; multiplicativă  $(x \cdot y)$ ;  $x \circ y$ ;  $x \perp y$ ;  $x \top y$ ;  $x \vee y$ ;  $x \wedge y$ ;  $x \Delta y$ ;  $x \oplus y$ ;  $x \odot y$  etc.

**Definiția 2.** Fie legea de compoziție  $f: M \times M \rightarrow M$  și  $H \subset M, H \neq \emptyset$ . Mulțimea  $H$  se numește *parte stabilă* a lui  $M$  în raport cu legea  $f$  dacă pentru orice  $x, y \in H$  avem  $f(x, y) \in H$ .

Restricția funcției  $f$  la  $H \times H$  se numește *lege de compoziție indusă de  $f$  pe submulțimea  $H$* .

**Exemple. 1.** Adunarea și înmulțirea sunt legi de compoziție pe  $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}), \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

2. Fie  $A \neq \emptyset, \mathcal{F}(A) = \{g: A \rightarrow A\}$ . Aplicația  $f: \mathcal{F}(A) \times \mathcal{F}(A) \rightarrow \mathcal{F}(A), f(g, h) = g \circ h$  este lege de compoziție pe  $\mathcal{F}(A)$ .

3. Fie  $A \neq \emptyset, \mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subset A\}$ . Aplicațiile  $f, g: \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(A), f(X, Y) = X \cup Y; g(X, Y) = X \cap Y$  sunt legi de compoziție.

4. Scăderea pe  $\mathbb{N}$  nu este operație algebrică. Împărțirea pe  $\mathbb{N}^*$  și  $\mathbb{Z}^*$  nu sunt operații algebrice.

5. Dacă avem  $M$  mulțime finită ( $m = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}, n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$ , legea de compoziție poate fi dată prin tabla operației (tabla lui Cayley), astfel:

$\circ$	$a_1$	$a_2$	...	$a_j$	...	$a_n$
$a_1$	$a_1 \circ a_1$	$a_1 \circ a_2$	...	$a_1 \circ a_j$	...	$a_1 \circ a_n$
$a_2$	$a_2 \circ a_1$	$a_2 \circ a_2$	...	$a_2 \circ a_j$	...	$a_2 \circ a_n$
$\mathcal{M}$						
$a_j$	$a_j \circ a_1$	$a_j \circ a_2$	...	$a_j \circ a_j$	...	$a_j \circ a_n$
$\mathcal{M}$						
$a_n$	$a_n \circ a_1$	$a_n \circ a_2$	...	$a_n \circ a_j$	...	$a_n \circ a_n$

6. Operațiile pe  $M = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  sunt funcții  $f: M \times M \rightarrow M$ . Atunci numărul funcțiilor definite pe o mulțime cu  $n^2$  elemente într-o mulțime cu  $n$  elemente este  $n^{(n^2)}$ .

Pentru  $M = \{0, 1\}$  avem 16 operații algebrice date de:

- 1)  $\begin{array}{c|cc} 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \end{array}$  2)  $\wedge \begin{array}{c|cc} 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 \end{array}$  3)  $\begin{array}{c|cc} 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 \end{array}$  4)  $\begin{array}{c|cc} 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 \end{array}$  5)  $\begin{array}{c|cc} 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 \end{array}$  6)  $\vee \begin{array}{c|cc} 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \end{array}$
- 7)  $\begin{array}{c|cc} 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}$  8)  $\begin{array}{c|cc} 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \end{array}$  9)  $\Rightarrow \begin{array}{c|cc} 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 \end{array}$  10)  $\circ \begin{array}{c|cc} 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \end{array}$  11)  $\begin{array}{c|cc} 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \end{array}$  12)  $\begin{array}{c|cc} 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \end{array}$
- 13)  $\begin{array}{c|cc} 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \end{array}$  14)  $\begin{array}{c|cc} 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \end{array}$  15)  $\begin{array}{c|cc} 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 \end{array}$  16)  $\begin{array}{c|cc} 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \end{array}$

## Probleme rezolvate

1. Fie  $M = \{1, 2, 3, 4\}$  și aplicația  $f(x, y) = \begin{cases} x - y, & x \geq 3, y \leq 2 \\ x + |x - y|, & \text{în rest} \end{cases}$ . Este  $f$  lege de compoziție?

*Soluție.* Avem tabla operației:

	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	3	2	3	4
3	2	1	3	4
4	3	2	5	4

Deoarece  $f(4, 3) = 5 \notin M$ ,  $f$  nu este lege de compoziție.

2. Fie  $M = [3; 5]$  și  $x \circ y = xy - 4x - 4y + 20, \forall x, y \in M$ . Demonstrați că „ $\circ$ ” este lege de compoziție pe  $M$ .

*Soluție.* Fie  $x, y \in [3, 5]$ . Avem  $x - 4 \in [-1, 1]$ ;  $y - 4 \in [-1, 1]$  și deci  $(x - 4)(y - 4) \in [-1, 1]$ . Cum  $x \circ y = (x - 4)(y - 4) + 4$ , atunci avem  $x \circ y \in M$ .

3. Demonstrați că înmulțirea matricelor pe  $M$  este lege de compoziție, unde:

$$M = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} x & 0 & 1-x \\ 0 & 0 & 0 \\ 1-x & 0 & x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\} \right\}.$$

*Soluție.* Fie  $x, y \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$ . Avem  $A(x) \cdot A(y) = \begin{pmatrix} x & 0 & 1-x \\ 0 & 0 & 0 \\ 1-x & 0 & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y & 0 & 1-y \\ 0 & 0 & 0 \\ 1-y & 0 & y \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 1+2xy-x-y & 0 & -(2xy-x-y) \\ 0 & 0 & 0 \\ -(2xy-x-y) & 0 & 1+2xy-x-y \end{pmatrix} = A(2xy-x-y+1). \text{ Trebuie demonstrat c\^a}$$

$1 + 2xy - x - y \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$ . Din  $x, y \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$  avem  $2\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(y - \frac{1}{2}\right) \neq 0$ , de unde rezult\^a c\^a  $2xy - x - y + 1 \neq \frac{1}{2}$ .

4. Fie  $H = \{x + y\sqrt{2} \mid x, y \in \mathbb{Q}, x^2 - 2y^2 = 1\}$ . Demonstra\^ti c\^a  $H$  este parte stabil\^a infinit\^a a lui  $\mathbb{R}$  \u00een raport cu \u00eenmul\^tirea.

*Solu\^tie.* Fie  $x, y, a, b \in \mathbb{Q}$ , cu  $x^2 - 2y^2 = 1, a^2 - 2b^2 = 1$ . Avem:

$t = (x + y\sqrt{2})(a + b\sqrt{2}) = (ax + 2by) + (ay + bx)\sqrt{2}$ . Cum  $ax + 2by \in \mathbb{Q}, ay + bx \in \mathbb{Q}$  \u00e7i  $(ax + 2by)^2 - 2(ay + bx)^2 = a^2x^2 + 4b^2y^2 - 2a^2y^2 - 2b^2x^2 = (a^2 - 2b^2)(x^2 - 2y^2) = 1$  rezult\^a  $t \in H$ . Observ\^am c\^a  $x = 3 + 2\sqrt{2} \in H$ . Atunci  $x^2, x^3, \dots, x^n \in H$ , unde  $n \in \mathbb{N}^*$ . Cum  $\{x^n \mid n \in \mathbb{N}^*\} = A$  este infinit\^a \u00e7i  $A \subset H$ , avem  $H$  infinit\^a.

5. Rela\^tia  $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}, \left(\frac{m}{n}, \frac{p}{q}\right) \rightarrow \frac{mq}{np}$  nu este lege de compozi\^tie. Pentru perechea

$\left(\frac{1}{3}, \frac{0}{2}\right)$  nu avem corespondent \u00een  $\mathbb{Q}$ , deoarece  $\frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 0} \notin \mathbb{Q}$ .

*Observa\^tie.* Dac\^a exist\^a perechi  $(x, y) \in M \times M$  pentru care  $x \circ y$  nu este definit sau  $x \circ y \notin M$  sau  $x \circ y$  nu este unic determinat, atunci rela\^tia „ $\circ$ ” nu este func\^tie (\u00e7i deci nici lege de compozi\^tie pe  $M$ ).

6. Mul\^timea  $H = \{\pm 3, \pm 2, \pm 1\}$  nu este parte stabil\^a a lui  $\mathbb{Z}$  \u00een raport cu \u00eenmul\^tirea. De exemplu,  $3 \in H, -2 \in H$ , dar  $3 \cdot (-2) \notin H$ .

7. Fie  $a \in \mathbb{R}$  \u00e7i legea de compozi\^tie  $x \circ y = xy + 4x + 4y + a$  pe  $\mathbb{R}$ . Determina\^ti  $a$ , astfel \u00eenc\^at  $H = (-4, \infty)$  s\^a fie parte stabil\^a a lui  $\mathbb{R}$  \u00een raport cu legea de compozi\^tie „ $\circ$ ”.

*Solu\^tie.* Fie  $a \in \mathbb{R}$  pentru care  $H$  este parte stabil\^a a lui  $\mathbb{R}$  \u00een raport cu legea de compozi\^tie „ $\circ$ ”. Pentru  $y_0 \in (-4, \infty)$  fixat rezult\^a c\^a  $x \circ y_0 = xy_0 + 4x + 4y_0 + a > -4$  pentru orice  $x > -4$ . \u00c\n particular, avem  $\lim_{x \rightarrow -4} (xy_0 + 4x + 4y_0 + a) \geq -4$  \u00e7i deci  $a \geq 12$ . Reciproc, fie  $a \geq 12, x, y \in H$ . Atunci  $x \circ y = (x + 4)(y + 4) + a - 16 > a - 16 \geq 12 - 16 = -4$ .

8. Determina\^ti toate p\^ar\^tile stabile finite ale lui  $\mathbb{Q}$  \u00een raport cu adunarea, respectiv \u00eenmul\^tirea.

*Soluție.* Fie  $H$  parte stabilă finită a lui  $\mathbb{Q}$  în raport cu înmulțirea și fie  $a \in H$ . Prin inducție rezultă că  $a^n \in H$  pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ . Cum  $H$  este finită, rezultă că există  $p, q \in \mathbb{N}^*$ ,  $p > q$ , astfel încât  $a^p = a^q$ . Atunci  $a^{p-q} = 1$  și deci  $a \in \{\pm 1, 0\}$ . Avem deci  $H \subset \{\pm 1, 0\}$ . Părțile stabile sunt  $\{0\}$ ,  $\{1\}$ ,  $\{-1, 1\}$ ,  $\{0, 1, -1\}$ . Pentru adunare rezultă  $na \in H$  pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ . Cum  $H$  este finită, rezultă că există  $p, q \in \mathbb{N}^*$ , astfel încât  $pa = qa \Leftrightarrow (p - q)a = 0 \Leftrightarrow a = 0$ . Obținem  $H = \{0\}$ .

## Probleme propuse

- Determinați numărul operațiilor algebrice definite pe  $M = \{0, 1\}$ .
- Justificați de ce împărțirea nu este operație algebrică pe fiecare din mulțimile  $\mathbb{N}^*$ ,  $\mathbb{Z}^*$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$ .
- Justificați de ce adunarea, scăderea, înmulțirea și împărțirea nu sunt legi de compoziție pe mulțimea numerelor iraționale.
- a) Demonstrați că pentru orice  $a, b \in \mathbb{R}$  avem:

$$\max(a, b) = \frac{a + b + |a - b|}{2}, \quad \min(a, b) = \frac{a + b - |a - b|}{2}.$$

b) Pe care din mulțimile  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$ , „max” și „min” sunt legi de compoziție?

- Demonstrați că „ $\circ$ ” este lege de compoziție în cazurile:

a)  $M = (3, \infty)$ ,  $x \circ y = xy - 3x - 3y + 12$ ;    b)  $M = [2, \infty)$ ,  $x \circ y = xy - 2x - 2y + 6$ ;

c)  $M = [4, 6]$ ,  $x \circ y = xy - 5x - 5y + 30$ ;    d)  $M = (6, 8)$ ,  $x \circ y = xy - 7x - 7y + 56$ ;

e)  $M = (-1, 1)$ ,  $x \circ y = \frac{x + y}{1 + xy}$ ;    f)  $M = [3, \infty)$ ,  $x \circ y = 2xy - 6(x + y) + 21$ ;

g)  $M = (-\infty, 1)$ ,  $x \circ y = \frac{xy - 2}{x + y - 3}$ ;    h)  $M = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ,  $x \circ y = \frac{1}{2}(1 + x + y - xy)$ .

- Demonstrați că înmulțirea este lege de compoziție pe mulțimile:

a)  $M = \left\{ \begin{pmatrix} 1+5a & 10a \\ -2a & 1-4a \end{pmatrix} \mid a > 0 \right\}$ ;

b)  $M = \left\{ \begin{pmatrix} 1+2a & a \\ -2a & 1-a \end{pmatrix} \mid a > -1 \right\}$ ;

c)  $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$ ;

d)  $M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & 2a^2 + 2a \\ 0 & 1 & 4a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$ ;

e)  $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ bi & a + bi \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$ ;

f)  $M = \left\{ \begin{pmatrix} x & iy \\ iy & x \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 \neq 0 \right\}$ .

7. Studiați dacă mulțimea  $M$  este parte stabilă pentru  $(\mathbb{C}, \cdot)$ :

- a)  $M = \{z \in \mathbb{C} \mid z^4 = 1\}$ ;      b)  $M = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ ;  
 c)  $M = \{z \in \mathbb{C} \mid z^3 = \bar{z}\}$ ;      d)  $M = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| = 1\}$ .

8. Demonstrați că „ $\circ$ ” este lege de compoziție în cazurile:

a)  $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0 \right\}$ ;  $A \circ B = AB + BA$ ;

b)  $M = \mathbb{Q} \setminus \{2\}$ ;  $x \circ y = x + y + \frac{xy}{2}$ ;      c)  $M = \mathbb{C} \setminus \{1\}$ ;  $z_1 \circ z_2 = z_1 + z_2 - z_1 z_2$ ;

d)  $M = [0, a]$ ,  $a > 0$ ;  $x \circ y = \frac{x+y}{1 + \frac{xy}{a^2}}$ ;      e)  $M = (0, \infty) \setminus \{1\}$ ,  $x \circ y = x^{\ln y}$ ;

f)  $M = (1, 2)$ ;  $x \circ y = \frac{3xy - 4x - 4y + 6}{2xy - 3x - 3y + 5}$ ;

g)  $M = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{Z}, x \text{ impar} \right\}$ .

9. Demonstrați că  $M$  este parte stabilă a lui  $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \cdot)$ , unde  $M = \{A^n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$  în următoarele cazuri:

a)  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ;      b)  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ;      c)  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

10. Fie  $M \subset \mathbb{C}$  astfel încât  $A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \subset M$ . Știind că  $M$  este parte stabilă față de adunarea numerelor complexe, demonstrați că  $B \subset M$ , unde  $B = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ .

11. Fie  $a \in \mathbb{R}$  și legea „ $\circ$ ” definită pe  $\mathbb{R}$  prin  $x \circ y = x + y - xy - a(x + y) + a$ . Determinați  $a$  astfel încât  $H = (0, 1]$  să fie parte stabilă a lui  $\mathbb{R}$  în raport cu legea „ $\circ$ ”.

12. Pe  $\mathbb{R}$  este definită legea  $x \circ y = xy - x - y$ . Demonstrați că  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  și  $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$  nu sunt părți stabile ale lui  $(\mathbb{R}, \circ)$ .

13. Determinați părțile stabile finite ale lui  $\mathbb{R}$  în raport cu adunarea (respectiv înmulțirea) pe  $\mathbb{R}$ .

14. Se consideră matricea  $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$  și  $M = \{x = aA + bI_2 \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$ .

a) Demonstrați că  $M$  este parte stabilă a lui  $(\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}), \cdot)$ .

b) Demonstrați că există  $a_n, b_n \in \mathbb{Z}$  astfel încât  $A^n = a_n A + b_n I_2$ .

15. Pe  $\mathbb{Z}$  definim legea „ $\circ$ ” prin  $a \circ b = \begin{cases} 0, & a+b \in 2\mathbb{Z}+1 \\ 1, & a+b \in 2\mathbb{Z} \end{cases}$ . Calculați  $A = (a \circ b) \circ c$  și

$B = a \circ (b \circ c)$ , unde  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ .

16. Determinați tabla legii de compoziție în cazurile:

a)  $M = \{0, 1, 2, 3\}$ ,  $x \circ y =$  restul împărțirii lui  $x \cdot y$  la 4;

b)  $M = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ,  $x \circ y =$  restul împărțirii lui  $x + y$  la 5;

c) înmulțirea pe  $U_4 = \{z \in \mathbb{C} \mid z^4 = 1\}$ ;

d)  $\alpha$  este plan,  $A, B \in \alpha$ ,  $A \neq B$ ,  $d = AB$ ,  $m$  este mediatoarea lui  $(AB)$ , iar  $O$  este mijlocul lui  $(AB)$ ,  $M = \{1_\alpha, S_d, S_m, S_O\}$ , unde  $1_\alpha$  este aplicația identică a planului, iar celelalte sunt simetriile față de  $d, m, O$ .

17. **Definiție.** Fie  $d \in \mathbb{Z} - \{0, 1\}$ . Numărul  $d$  se numește *întreg liber de pătrate* dacă nu este divizibil cu pătratul niciunui număr prim.

Notăm  $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$  și  $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ .

a) Determinați întregii liberi de pătrate din mulțimea  $A = \{-1, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 12, \pm 15\}$ .

b) Demonstrați că  $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$  și  $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$  sunt părți stabile în  $(\mathbb{R}, +)$  și în  $(\mathbb{R}, \cdot)$ .

18. Fie  $M = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ , unde  $f_i: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$ ,  $f_1(x) = x$ ,  $f_2(x) = \frac{1}{x}$ ,  $f_3(x) = -x$ ,  $f_4(x) = -\frac{1}{x}$ ,

iar „ $\circ$ ” este compunerea funcțiilor. Stabiliți tabla legii de compoziție.

19. Fie  $r \in \{0, 1\}$ ,  $H_r = 2\mathbb{Z} + r = \{2k + r \mid k \in \mathbb{Z}\}$ . În ce caz  $H_r$  este parte stabilă a lui  $\mathbb{Z}$  în raport cu adunarea, respectiv înmulțirea?

20. Definim pe  $\mathbb{R}$  legea de compoziție  $x \circ y = xy - 3x - 5y + 17$ . Mulțimile  $\mathbb{Q} - \mathbb{Z}$  și  $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$  sunt părți stabile ale lui  $\mathbb{R}$  în raport cu legea „ $\circ$ ”?

## 1.2. Asociativitate. Comutativitate

books

**Definiție.** Fie legea de compoziție  $f: M \times M \rightarrow M$ .

Legea  $f$  se numește *comutativă* dacă  $f(x, y) = f(y, x)$ ,  $\forall x, y \in M$ .

Legea  $f$  se numește *asociativă* dacă  $f(f(x, y), z) = f(x, f(y, z))$ ,  $\forall x, y, z \in M$ .

Pentru notația aditivă:  $x + y = y + x$ ;  $(x + y) + z = x + (y + z)$ .

Pentru notația multiplicativă:  $xy = yx$ ;  $(xy)z = x(yz)$ .

**Exemple. 1.** Adunarea și înmulțirea pe  $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$  sunt asociative și comutative.

**2.** Adunarea pe  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  este comutativă și asociativă.

**3.** Înmulțirea pe  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  este asociativă, dar nu este comutativă.

**4.** Scăderea pe  $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$  nu este nici comutativă, nici asociativă.

**Observații. 1.** Dacă  $f: M \times M \rightarrow M$  este lege de compoziție comutativă pe mulțimea  $M$  și  $H \subset M$  este parte stabilă a lui  $M$  în raport cu legea  $f$ , atunci operația indusă pe  $H$  de legea  $f$  este comutativă (spunem că proprietatea de comutativitate este ereditară).

**2.** Dacă mulțimea  $M$  este finită, comutativitatea operației  $f$  pe  $M$  poate fi verificată pe tabla legii de compoziție. Legea este comutativă dacă tabla legii este simetrică față de diagonala principală a acesteia, adică de  $f(a_1, a_1), f(a_2, a_2), \dots, f(a_n, a_n)$ .

**3.** Dacă  $x_1, x_2, \dots, x_n \in M$  sunt elemente permutabile două câte două și legea este notată multiplicativ, atunci produsul  $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n$  nu depinde de ordinea factorilor.

Pentru orice permutare  $\sigma \in S_n$  avem  $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n = x_{\sigma(1)} \cdot x_{\sigma(2)} \cdot \dots \cdot x_{\sigma(n)}$ . Avem  $(xy)^n = x^n y^n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , dacă  $xy = yx$ , respectiv  $n(x + y) = nx + ny$ . S-a notat  $nx = \underbrace{x + x + \dots + x}_{n \text{ ori}}$ ,

respectiv  $x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n \text{ ori}}$ .

**4.** Proprietatea de asociativitate este ereditară (dacă  $f$  este lege de compoziția asociativă pe  $M$  și  $H \subset M$  este parte stabilă a lui  $M$  în raport cu  $f$ , atunci și legea indusă pe  $H$  de  $f$  este asociativă:  $a_1 \circ a_2 \circ \dots \circ a_n = a_1 \circ (a_2 \circ a_3 \circ \dots \circ a_n) = (a_1 \circ a_2 \circ \dots \circ a_{n+1}) \circ a_n$ ;

$$a_1 \circ a_2 \circ \dots \circ a_n = (a_1 \circ a_2 \circ a_3 \circ \dots \circ a_k) \circ (a_{k+1} \circ a_{k+2} \circ \dots \circ a_n).$$

**5.** Dacă legea  $f$  este neasociativă pe  $M$  și  $H \subset M$  este parte stabilă a lui  $M$  în raport cu  $f$ , nu rezultă în mod necesar că legea indusă de  $f$  pe  $H$  este neasociativă.

*Exemplu:*  $M = \mathbb{Z}$ , legea este scăderea,  $H = \{0\}$ .

**6.** Este posibil ca legea de compoziție pe  $M$  să nu fie comutativă, dar legea de compoziție indusă pe o mulțime  $H \subset M$  să fie comutativă (vezi exercițiul rezolvat 10).

**7. Definiție.** Fie „ $\perp$ ” și „ $\circ$ ” două legi de compoziție pe aceeași mulțime  $M$ . Spunem că legea „ $\perp$ ” este distributivă la stânga față de operația „ $\circ$ ” dacă pentru orice  $x, y, z \in M$  avem  $x \perp (y \circ z) = (x \perp y) \circ (x \perp z)$ , respectiv distributivă la dreapta față de operația „ $\circ$ ” dacă  $(y \circ z) \perp x = (y \perp x) \circ (z \perp x)$ ,  $\forall x, y, z \in M$ .

**Observație.** Dacă legea „ $\perp$ ” este comutativă, atunci distributivitatea la stânga se identifică cu distributivitatea la dreapta.

**Exemple: 1.** Înmulțirea este distributivă față de adunare pe fiecare dintre mulțimile  $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

**2.** Fie  $M \neq \emptyset$ . Pe  $\mathcal{A}(M)$ , reuniunea (intersecția) este distributivă față de intersecție (reuniune):  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ;  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ .

**3.** Adunarea nu este distributivă față de înmulțire pe fiecare din mulțimile  $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

## Probleme rezolvate

**1.** Fie o mulțime  $M \neq \emptyset$  având card  $M = n$  ( $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ ). Determinați numărul legilor de compoziție comutative definite pe  $M$ .

*Soluție.* Legea este comutativă dacă tabla legii (tabla lui Cayley) este simetrică față de diagonala principală. Trebuie determinat numărul elementelor  $a_i \circ a_j$ , unde  $1 \leq i < j \leq n$ .

Avem  $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$  asemenea elemente. Din numărul total  $n^{n^2}$  de legi

avem  $n^{\frac{n(n+1)}{2}}$  comutative.

**2.** Dați exemple de legi definite pe mulțimi finite:

a) comutativă, care nu este asociativă;

b) asociativă, care nu este comutativă.

*Soluție.* a) 

	$e$	$a$	$b$
$e$	$e$	$a$	$b$
$a$	$a$	$a$	$e$
$b$	$b$	$e$	$a$

 b) 

	$e$	$a$	$b$
$e$	$e$	$a$	$b$
$a$	$a$	$e$	$b$
$b$	$b$	$a$	$b$

a)  $(b \circ a) \circ a = e \circ a = a$ ;  $b \circ (a \circ a) = b \circ a = e$ .

**3.** Determinați  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , știind că legea „ $\circ$ ” definită pe  $\mathbb{R}$  prin  $x \circ y = ax + by + c$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ , este comutativă și asociativă.

*Soluție.* Avem  $x \circ y = y \circ x, \forall x, y \in \mathbb{R} \Leftrightarrow ax + by + c = ay + bx + c, \forall x, y \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a = b$ . Fie  $x, y, z \in \mathbb{R}$ . Avem  $(x \circ y) \circ z = a^2x + aby + bz + ac + c$  și  $x \circ (y \circ z) = ax + aby + b^2z + bc + c$ . Legea este asociativă dacă și numai dacă  $a^2 = a, b^2 = b$  și  $ac = bc$ . Tripletele  $(a, b, c)$  pentru care legea este asociativă sunt  $(0, 0, c), (1, 1, c), (1, 0, 0), (0, 1, 0)$ . Legea este comutativă și asociativă în cazurile  $(0, 0, c)$  și  $(1, 1, c)$ .

**4.** Fie  $M = \left\{ A(a) = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 1 & a \\ a & 0 & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}^* \right\}$ .

a) Demonstrați că „ $\circ$ ” pe  $M$  este asociativă și comutativă.

LIBRIS We know books

b) Rezolvați ecuația  $A^n(a) = \begin{pmatrix} 32 & 0 & 32 \\ 0 & 1 & 0 \\ 32 & 0 & 32 \end{pmatrix}$ , unde  $a \in \mathbb{Z}$ .

*Soluție.* a) Avem  $A(a) \cdot A(b) = \begin{pmatrix} 2ab & 0 & 2ab \\ 0 & 1 & 0 \\ 2ab & 0 & 2ab \end{pmatrix} = A(2ab)$ . Cum  $A(2ab) = A(2ba) =$

$= A(b) \cdot A(a) \Rightarrow$  înmulțirea pe  $M$  este comutativă. Deoarece „ $\cdot$ ” pe  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  este asociativă și  $M \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ , rezultă că înmulțirea pe  $M$  este asociativă. Altfel, avem:

$(A(b) \cdot A(b)) \cdot A(c) = (A(2ab)) \cdot A(c) = A(2 \cdot 2ab \cdot c) = A(4abc) = A(2a \cdot (2bc)) = A(a) \cdot A(2bc) = A(a) \cdot (A(b) \cdot A(c))$ ,  $\forall a, b, c \in \mathbb{R}^*$ .

b)  $A^2(a) = A(2a^2)$ ,  $A^3(a) = A(2a^2) \cdot A(a) = A(2^2 \cdot a^3)$ . Prin inducție rezultă  $A^n(a) = A(2^{n-1}a^n)$ . Avem  $A^n(a) = A(32) \Leftrightarrow 2^{n-1}a^n = 32$ ;  $(2a)^n = 64 = (\pm 2)^6$ . Pentru  $(n, a)$  avem soluțiile  $(6; \pm 1)$ ;  $(3; 2)$ ;  $(32; 1)$ .

5. Pe  $\mathbb{R}$  se definește legea de compoziție  $x \circ y = xy + ax + ay + b$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ . Determinați:

a)  $a$  și  $b$ , astfel încât legea să fie asociativă;

b)  $x_n = \underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , în condițiile de la a).

*Soluție.* a)  $A = (x \circ y) \circ z = (xy + ax + ay + b) \circ z = (xy + ax + ay + b) \cdot z + a(xy + ax + ay + b) + az + b = xyz + axy + axz + ayz + bz + a^2x + a^2y + ab + az + b = xyz + axy + ayz + axz + ax + bx + a^2y + a^2z + ab + b$ . Avem  $A = B$ ,  $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (a^2 - a - b)(x - z) = 0$ ,  $\forall x, z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow b = a^2 - a$ . În acest caz avem  $x \circ y = xy + ax + ay + a^2 - a = (x + a)(y + a) - a$ ;

b) Avem  $x_2 = x \circ x = (x + a)^2 - a$ . Presupunem  $P(n): x_n = (x + a)^n - a$ . Avem  $P(n + 1): x_{n+1} = x_n \circ x = [(x + a)^n - a] \circ x = [(x + a)^n - a + a](x + a) - a = (x + a)^{n+1} - a$ .

6. Determinați relațiile dintre  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , dacă relația definită pe  $\mathbb{R}$ ,  $x \circ y = xy + ax + by + c$  este asociativă.

*Soluție.* Fie  $A = (x \circ y) \circ z = xyz + axy + axz + byz + a^2x + aby + (b + c)z + ac + c$ ,  $B = x \circ (y \circ z) = xyz + axy + bxz + byz + (a + c)x + aby + b^2z + ac + c$ . Avem  $A = B$ ,  $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow axz + a^2x + (b + c)z + ac = bxz + (a + c)x + b^2z + bc \Leftrightarrow a = b$ ,  $a^2 = a + c$ ,  $b^2 = b + c$ ,  $ac = bc \Leftrightarrow a = b$ ,  $c = a^2 - a$ . Legea devine  $x \circ y = xy + ax + ay + a^2 - a = (x - a)(y + a) + a$ .

7. Verificați că legea definită pe  $\mathbb{R}$ , pentru  $a \in \mathbb{R}$ , prin  $x \circ y = xy - ax - ay + a^2 - a = (x - a)(y - a) + a$  este asociativă.

*Soluție.* Se înlocuiește  $a$  cu  $-a$  în exercițiul 6.

8. Pe  $M = (-\infty, 1)$  definim  $x \circ y = \frac{2-xy}{3-x-y}$ . Demonstrați că „ $\circ$ ” este lege de compoziție comutativă și asociativă.

*Soluție.* Fie  $x, y \in M \Leftrightarrow x < 1, y < 1$ . Atunci  $x + y < 2$ , deci  $3 - x - y > 0$ . Avem  $x \circ y < 1 \Leftrightarrow \frac{2-xy}{3-x-y} < 1 \Leftrightarrow 2 - xy < 3 - x - y \Leftrightarrow xy - x - y + 1 > 0 \Leftrightarrow (x-1)(y-1) > 0$  (adevărată, deoarece  $x-1 < 0, y-1 < 0$ ). Avem deci „ $\circ$ ” lege de compoziție. Deoarece  $x + y = y + x, xy = yx, \forall x, y \in \mathbb{R}$ , rezultă că  $x \circ y = \frac{2-xy}{3-x-y} = y \circ z$  și legea „ $\circ$ ” este

$$\text{comutativă. Fie } A = (x \circ y) \circ z = \frac{2 - \frac{2-xy}{3-x-y} \cdot z}{3 - \frac{2-xy}{3-x-y} - z} = \frac{xyz - 2x - 2y - 2z + 6}{xy + yz + zx - 3x - 3y - 3z + 6}.$$

Cum expresiile  $E_1 = xyz - 2(x + y + z) + 6$  și  $E_2 = (xy + yz + zx) - 3(x + y + z) + 6$  sunt simetrice în  $x, y, z$ , avem  $B = x \circ (y \circ z) = \frac{E_1}{E_2}$ , deci  $A = B$ , adică legea „ $\circ$ ” este și asociativă.

9. Pe intervalul  $G = (-a, a), a > 0$ , considerăm legea  $x \circ y = \frac{x+y}{1+\frac{xy}{a^2}}$ . Demonstrați că

legea „ $\circ$ ” este comutativă și asociativă.

*Soluție.* Pentru orice  $x, y \in G \subset \mathbb{R}$  avem  $x + y = y + x, xy = yx$  și deci  $x \circ y = y \circ z$ , adică legea „ $\circ$ ” este comutativă. Observăm că  $x, y \in G \Leftrightarrow |x| < a, |y| < a$ , de unde  $xy > -a^2$

și deci numitorul  $1 + \frac{xy}{a^2} > 0$ . Avem  $\left| \frac{x+y}{1+\frac{xy}{a^2}} \right| < a \Rightarrow |x+y| < a + \frac{xy}{a^2} \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2xy <$

$$a^2 + 2xy + \frac{x^2y^2}{a^2} \Leftrightarrow x^2y^2 + a^4 - a^2x^2 - a^2y^2 > 0 \Leftrightarrow (x^2 - a^2)(y^2 - a^2) > 0 \text{ (adevărat)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{„}\circ\text{” este bine definită. Avem } A = (x \circ y) \circ z = \frac{a^2(x+y)}{a^2+xy} \circ z = a^2 \cdot \frac{a^2 \cdot \frac{x+y}{a^2+xy} + z}{a^2 + a^2 \cdot \frac{x+y}{a^2+xy}} =$$

$$= \frac{a^2(x+y+z) + xyz}{a^2 + xy + yz + zx}. \text{ Cum expresiile } E_1 = a^2(x+y+z) + xyz \text{ și } E_2 = a^2 + (xy + yz + zx)$$

sunt simetrice în  $x, y, z$ , avem  $B = x \circ (y \circ z) = \frac{E_1}{E_2} = A$ , adică legea „ $\circ$ ” este asociativă.